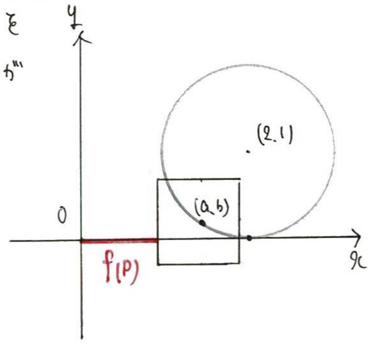
1996年　東大数学　文系 第3問

(i) 正方形が x軸と共有点を持つ場合、右図の赤い線分が最短距離 $f(P)$ である。



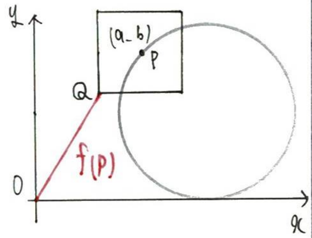
この時、$0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ であり、
$f(P) = a - \frac{1}{2}$ である。

aの範囲
円の方程式は、
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ なので、$y=\frac{1}{2}$ を代入すると、
$(x-2)^2 = \frac{3}{4}$　$x = 2-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから
$0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ で aのとりうる範囲は、$2-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

よって $f(P) = a - \frac{1}{2}$ の範囲は
$2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \leqq f(P) \leqq 2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \iff \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq f(P) \leqq \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

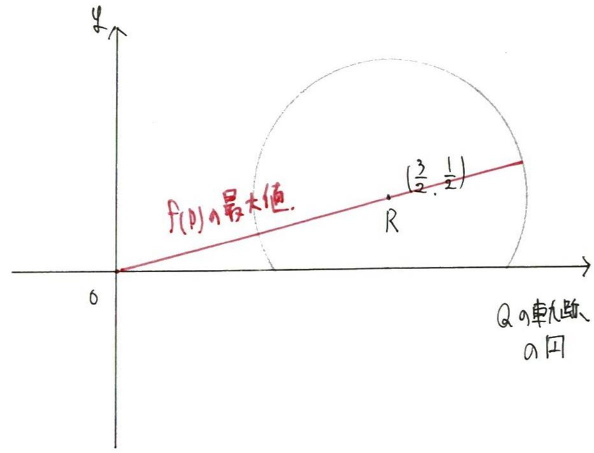
以上、$0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ のとき、$f(P)$ の最大値は、
$a = 2+\frac{\sqrt{3}}{2},\ b=\frac{1}{2}$ で $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。
(i)の結論

(ii) 正方形が x軸と共有点を持たない場合、正方形の左下の角と原点の距離を求めることとなる。(右図の赤い線分)
つまり $Q\left(a-\frac{1}{2},\ b-\frac{1}{2}\right)$ とすると
$f(P) = OQ$ である。



このとき、$\frac{1}{2} \leqq b \leqq 2$ である。

$P(a, b)$ の軌跡は $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ であるから、
$Q\left(a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}\right)$ の軌跡は $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$ かつ $y \geqq 0$ である。
x軸、y軸方向共に $-\frac{1}{2}$ 移動した軌跡となる。



上図で原点とQの軌跡の最長距離を求めればよいが、それは、赤い線分（直線ORと円の交点のうち、Oから遠い方の点までの距離）である。

この長さは $OR+1$ であり、
$OR = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ なので、
$f(P)$ の最大値は $\frac{\sqrt{10}}{2}+1$ である。
(ii)の結論

(i)(ii)より
$0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ のとき、$f(P)$ の最大値 $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2} \leqq b \leqq 2$ のとき　〃　$\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

このうち、大きい値を調べる。

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+1\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$
$$> \frac{\sqrt{9}}{2}-\frac{\sqrt{4}}{2}-\frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{2}-\frac{2}{2}-\frac{1}{2}$$
$$= 0$$

よって $\frac{\sqrt{10}}{2}+1 > \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

以上、求める値は $\frac{\sqrt{10}}{2}+1$ である。